

수학 영역 (가형)

성명		수험 번호						-				
----	--	-------	--	--	--	--	--	---	--	--	--	--

- 자신이 선택한 유형(가형/나형)의 문제지인지 확인하십시오.
- 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰십시오.
- 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하십시오.

풀내음을 머금은 나의 감정을 쏟아내듯이

- 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 문형 (홀수/짝수), 답을 정확히 표시하십시오.
- 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하십시오.
- 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하십시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.
- 계산은 문제지의 여백을 활용하십시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

제 2 교시

수학 영역(가형)

5지 선다형

1. ${}_{7}C_4 + {}_{7}C_5 + {}_{8}C_6$ 의 값은? [2점]

- ① 84 ② 85 ③ 86 ④ 87 ⑤ 88

2. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sin^2(x-1)}{(\ln x)^2}$ 의 값은? [2점]

- ① $\frac{1}{e^2}$ ② $\frac{1}{e}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ e

3. 두 위치 벡터 $\vec{a} = (1, \sqrt{2}, -1)$, $\vec{b} = (\sqrt{2}, 2, \sqrt{2})$ 가 이루는 각의 크기는? [2점]

- ① 0 ② $\frac{\pi}{6}$ ③ $\frac{\pi}{4}$ ④ $\frac{\pi}{3}$ ⑤ $\frac{\pi}{2}$

4. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x \sin x dx$ 의 값은? [3점]

- ① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

5. 서로 독립인 두 사건 A, B 에 대하여

$P(A) = \frac{1}{4}$, $P(A \cap B^c) = \frac{1}{6}$ 일 때, $P(A \cup B)$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{5}{12}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

6. 함수 $f(2x) = (4x^3 + 8)e^x$ ($x \geq -8$)라 할 때, $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 하자. $g'(4)$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

7. $(1+2x)^5(1-x^2)^4$ 의 x^6 의 계수는? [3점]

- ① -68 ② -72 ③ -76 ④ -80 ⑤ -84

8. M회사에서 생산되는 칩의 무게는 평균이 $m(g)$ 이고 표준편차가 4인 정규분포를 따른다고 한다. 한 상자에 칩 4개를 묶어 포장할 때, 상자의 무게가 108g 이상 128g 미만일 확률이 0.7745를 만족하도록 하는 m 의 값의 합을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [3점]

z	$P(-z \leq Z \leq z)$
1.0	0.6826
1.5	0.8664
2.0	0.9544
2.5	0.9876

- ① 51 ② 53 ③ 55 ④ 57 ⑤ 59

9. 주원이는 모양과 크기가 같은 히드라 4마리와 크기가 서로 다른 저글링 4마리를 가지고 있다. 주원이가 8마리의 개체를 서로 다른 두 기지에 각각 4마리씩 넣을 수 있는 모든 경우의 수는? [3점]

- ① 14 ② 16 ③ 18 ④ 20 ⑤ 22

10. 좌표공간 상에 점 $A(1, 5, -1)$ 과 $B(-3, 3, -3)$ 가 있다. 선분 AB 를 1:2로 외분하는 점 P 가 평면 $x - y + 2z = d$ 위에 있을 때, 점 A 에서 평면까지의 거리는? [3점]

- ① $\sqrt{6}$ ② $\frac{3\sqrt{6}}{2}$ ③ $2\sqrt{6}$ ④ $\frac{5\sqrt{6}}{2}$ ⑤ $3\sqrt{6}$

11. 확률변수 X 가 아래와 같은 확률함수를 가진다.

$$P(X=x) = {}_{30}C_x p^x (ap)^{30-x} \quad (x=1, 2, 3, \dots, 30)$$

확률변수 $Y=4X+5$ 에 대하여 $V(Y)=90$ 일 때, 상수 a 의

값은? (단, $p < \frac{1}{2}$) [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

12. 닫힌구간 $\left[0, \frac{8}{3}\pi\right]$ 에서 정의된 함수

$$f(x) = \sqrt{3} \sin x - 3 \cos x + \frac{1}{2}$$
와 직선 $y = mx$ 에 대하여 두 함수

와 $x=0$, $x=\frac{8}{3}\pi$ 로 둘러싸인 영역의 넓이를 차례대로 A , B ,

C , D 라 하자. $A+C=B+D$ 를 만족하도록 하는 상수 m 의

값은? [3점]

- ① $\frac{1}{8\pi}$ ② $\frac{1}{4\pi}$ ③ $\frac{3}{8\pi}$ ④ $\frac{1}{2\pi}$ ⑤ $\frac{5}{8\pi}$

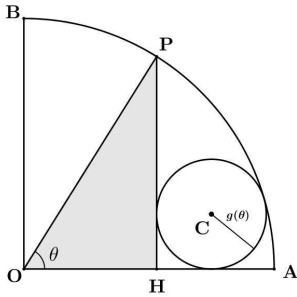
13. 정사면체 $O-ABC$ 가 있다. 모서리 OA, OB, OC 를 삼등분하는 점에 대해 OA 위에 O 에 가까운 점을 X , OB 위에 B 와 가까운 점을 Y , OC 위에 C 와 가까운 점을 Z 라 하자. 평면 XYZ 와 평면 ABC 가 이루는 각의 크기를 θ 라 할 때, $\cos\theta$ 의 값은?
[3점]

- ① $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{2}{3}$
 ④ $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ⑤ $\frac{\sqrt{6}}{3}$

14. 한 자리 자연수 k 에 대하여 원 $x^2+y^2=k^2$ 과 $y=\tan\left(\frac{\pi}{3}x\right)$ 의 교점의 개수를 확률변수 X 라 하자. $E(3X-6)$ 의 값은? [4점]

- ① 16 ② 17 ③ 18 ④ 19 ⑤ 20

15. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심이 O인 사분원 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 P에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 H라 하고, $\angle POH = \theta$ 라 하자. 삼각형 POH의 넓이를 $f(\theta)$, 선분 PH, 선분 AH와 호 AP에 모두 접하는 원의 반지름의 길이를 $g(\theta)$ 라 할 때, $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{g(\theta)}{\theta \times f(\theta)}$ 의 값은? [4점]



- ① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ 2

16. 다음은 연속확률변수 X, Y 의 확률밀도함수

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \quad (-\infty < x < \infty), \quad g(t) = P(|X| \leq t) \text{에 대해}$$

$P(0 \leq Y \leq 1)$ 의 값을 구하는 과정이다.

확률의 정의에 의해 $P(0 \leq Y \leq 1) = \int_0^1 g(t) dt$ 이므로
 부분적분을 하면 $g(1) - \int_0^1 t g'(t) dt$ 가 된다.
 미적분학의 기본정리에 의해 $g'(t) = \boxed{\text{(가)}}$ 이므로
 $\int_0^1 t g'(t) dt = \int_0^1 t \times \boxed{\text{(가)}} dt$ 이다.
 이는 $E(\alpha \leq X \leq 1) = \int_{-1}^0 \boxed{\text{(나)}} du$ 와 같으므로
 $\int_0^1 t g'(t) dt = \beta$ 이다.
 또한, $g(1) = 0.84$ 이므로 $P(0 \leq Y \leq 1) = 0.84 - \beta$ 이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $p(t), q(u)$ 라 할 때,

$\frac{\beta \times p(\alpha)}{\{q(\alpha)\}^2}$ 의 값은? [4점]

- ① $e-1$ ② $2(e-1)$ ③ $e(e-1)$
 ④ $\pi(e-1)$ ⑤ $4(e-1)$

17. 초점이 F인 포물선 $y^2 = 4px$ 위에 점 $P(t, 4\sqrt{3})$ 가 있다.

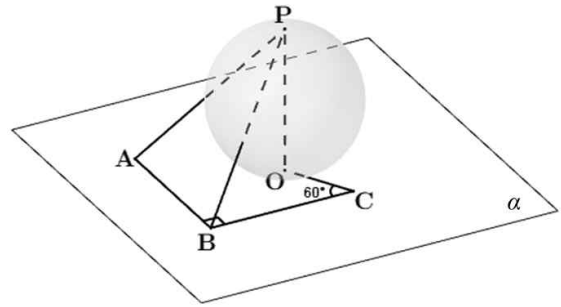
점 P에서의 포물선의 접선을 l , l 과 x 축의 교점을 Q라 하자.
삼각형 PFQ의 넓이가 $14\sqrt{3}$ 일 때, 점 F를 지나고 포물선의
준선과 l 에 모두 접하는 타원의 단축의 길이를 구하면?

(단, $0 < p < t$) [4점]

- ① $3\sqrt{2}$ ② $\sqrt{19}$ ③ $2\sqrt{5}$
- ④ $\sqrt{21}$ ⑤ $\sqrt{22}$

18. 아래 그림과 같이 평면 α 에 접하는 반지름의 길이가 2인 구
가 있다. 구 위의 점 P에서 평면 α 에 내린 수선의 발이 점
O이다. 평면 α 위에 세 점 A, B, C를 $\overline{AB} = \overline{BC} = 4$,
 $\angle ABC = 90^\circ$, $\angle BCO = 60^\circ$ 가 되도록 잡자.

$\cos(\angle PBA) = \frac{\sqrt{21}}{14}$ 일 때, 삼각형 PAB의 넓이는? [4점]



- ① 12 ② 10 ③ 8 ④ 6 ⑤ 4

19. 함수 $f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$ 에 대하여 $y = f(x)$ 위의 점 $P(t, f(t))$ 에서의 접선과 $y = |f(x)|$ 의 교점의 개수를 $g(t)$ 라 하자. 이에 대한 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

[4점]

<보 기>

ㄱ. $\lim_{t \rightarrow \sqrt{3}^-} g(t) = \lim_{t \rightarrow \sqrt{3}^+} g(t)$
 ㄴ. $y = g(t)$ 가 불연속인 t 의 개수는 5이다.
 ㄷ. $g(t) = 3$ 인 t 를 $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ 라 할 때, $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx < \ln 25$

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

20. 구간 $[4, \infty)$ 에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x) = (x-4)^2 g(x)$ 는 다음 조건을 만족한다.

(가) 함수 $f(x)$ 는 $(5, -\frac{3}{4})$ 만 변곡점으로 가진다.
 (나) $f'(x)$ 의 최솟값은 -1 이고, $f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$ ($\alpha < \beta$)
 (다) $g'(t) + g''(t) = 0$ 인 유일한 t 에 대해 $\left| \frac{t-\beta}{t-\alpha} \right| = e-1$ 가 성립한다.

구간 $[k, k+m]$ 에서 $f(x)$ 가 최솟값을 가지도록 하는 자연수 k 의 개수가 최대일 때, 자연수 m 의 최솟값은? (단, $\frac{5}{2} < e < 3$) [4점]

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

21. 스위치 D 와 I 로 이루어진 기계는 다음을 만족한다.

(가) 입력한 함수를 $f(x)$ 라 하고 D 를 누르면 $f(x)$ 가 출력되고, I 를 누르면 $F(x)=\int f(x)dx$ 가 출력된다.
 단, $F(0)$ =(스위치를 누른 총 횟수)
 (나) 버튼을 누르는 순서대로 실행한다.
 (다) (가), (나)를 반복한다.
 (라) 다음 중 하나에 해당하면 최종함수 $g(x)$ 를 출력한다.
 (i) 상수항만 남은 경우
 (ii) 사용자가 스위치 End 를 누른 경우
 예를 들어 $f(x)=3x^2$ 이고 D 1번, I 1번 누른 후 End 를 누르면 $g(x)=3x^2+2$ 가 출력된다.

기계에 $f(x)=xe^{-x}$ 를 넣고 예린이는 I 를 누르다가 D 를 k 번째부터 m 번, I 를 $(m+2)$ 번 누른 후 End 를 눌렀고, 엄지는 I 만 $(k+1)$ 번 누른 후 End 를 눌렀다. 예린이와 엄지가 출력한 함수가 $g_1(x)$, $g_2(x)$ 일 때, $g_1'(0)=3k+10$, $g_1(x)-g_2(x)$ 의 최솟값은 11이다. $g_1(0)+g_2(0)$ 의 값은? (단, k 와 m 은 자연수) [4점]

- ① 32 ② 34 ③ 36 ④ 38 ⑤ 40

단답형

22. ${}_3H_5 \times P(8, 3)$ 의 값을 구하시오. [3점]

23. 매개변수 $t(t > 0)$ 로 나타내어진 함수

$$x = \frac{2}{3}t^3 - t, \quad y = (a+t)e^t + b$$

에 대하여 $t=1$ 인 점에서 $\frac{dy}{dx} = 5e$ 이고, x 좌표와 y 좌표의 합이 $4e$ 이다. 상수 a, b 에 대하여 $9(a+b)$ 의 값을 구하시오.

[3점]

24. D 고등학교 지원자 중에서 수학을 좋아하는 학생을 알아보기 위해 지원자 중 n 명을 임의추출하여 조사한 결과 300명이 수학을 좋아한다고 답하였다. 이 결과를 이용하여 구한 D 고등학교 전체 지원자 중 수학을 좋아하는 학생의 비율 p 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간을 구하면 $0.225 \leq p \leq 0.275$ 이다. $\frac{n}{10}$ 의 값을 구하시오. (단, Z 가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $P(|Z| < 2) = 0.95$ 로 계산한다.) [3점]

25. 한 변의 길이가 3이고 $\angle ABC = \frac{\pi}{3}$ 인 마름모 $ABCD$ 가 있다. 선분 CD 를 삼등분하는 점 중에서 D 와 가까운 점을 E , 직선 BC 와 선분 CD 위의 점 E 에서 동시에 마름모에 외접하는 원의 중심을 O 라 하자. 점 O 에서 직선 BC 에 내린 수선의 발을 H 라 하고, 선분 AD 위의 한 점을 P 라 할 때, $|\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{HP}|$ 의 최댓값을 M 이라 하자. $4M$ 의 값을 구하시오. [3점]

26. 다음 조건을 만족하는 자연수 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수를 구하시오. [4점]

- (가) $a+b+c+d=12$
 (나) ac 는 3의 배수
 (다) abd 는 2의 배수

27. 좌표평면 위에 중심이 O이고 두 초점이 F, F'인 쌍곡선

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

이 있다. 쌍곡선 위의 점 P에 대해 $\angle PF'F = 90^\circ$

이고, $y = \sqrt{2}$ 와 쌍곡선과의 교점 중 P와 가까운 점 A,

y축과의 교점 B에 대해 다음 조건을 만족할 때, $\overline{FB} = k$ 라

하자. $5k^2$ 의 값을 구하시오. [4점]

(가) 점 P, B, F는 한 직선 위에 있다.

(나) $\overline{AB} \times \overline{OB} = \overline{OF}$

28. 구간 $[\alpha, \beta]$ 에서 함수 $f(x) = \frac{(\ln x)^m}{x}$ 와 x축으로 둘러싸인

부분을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. x축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면은 반원이다. 함수 $f(x)$ 는

$$f'(\alpha) = 0, f(x) \leq f(\beta)$$

를 만족한다. 반원의 호가 만드는 곡면의 넓이가 $\frac{81}{8}\pi$ 일 때,

$4 \int_{\beta}^{\beta e} f(x) dx$ 의 값을 구하시오. (m 은 2이상의 자연수) [4점]

29. 좌표공간 상에 중심이 $C(0, 0, 0)$ 이고 밑면이 xy 평면 위에 있는 반구와 두 점 A, B 에서 반구에 각각 접하는 두 평면 $\alpha: \sqrt{3}x - z + a = 0, \beta: \sqrt{3}x + z + b = 0$ 이 있다. α 와 β 의 교선을 l 이라 하면 점 C 에서 l 까지의 거리는 4이다. 반구의 밑면의 원주 위의 점 P 와 원주가 아닌 밑면을 제외한 반구 위의 점 Q 에 대하여 $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CQ} = 0$ 가 성립한다. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CQ}$ 가 최소일 때, $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BQ}$ 의 최댓값을 $p + q\sqrt{7}$ 이라 하자. $5(p^2 + q^2)$ 의 값을 구하시오. [4점]

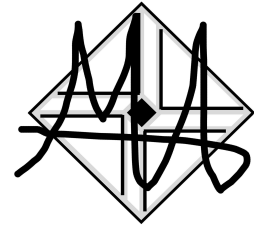
30. 이계도함수가 존재하는 $f(x)$ 와 이차함수 $g(x)$ 에 대하여 $h(x) = |f(x)g(x)|$ 라 하면, 아래 세 조건을 만족한다.

(가) $f'(x) = 3\sqrt{\{f(x)\}^2 + 4}$
 (나) 함수 $h(x)$ 는 오직 $x = 1$ 에서만 미분불가능하다.
 (다) $\int_0^{\frac{x}{3}} f'(t)f''(t)dt = \frac{9}{2}(e^x - e^{-x})^2$ 이고,
 $\int_0^1 h(x)dx = \frac{e^3 - 5e^{-3} + 4}{27}$ 이다.

$|g(4)|$ 의 값을 구하시오. [4점]

* 확인 사항
 ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

2018학년도 Aurora 모의평가 문제지



지은이 소개

집필

저자 | 김범호 (포만한 : MathAurora, MMI : Alg MAKBH)

검토 **No.1 검토진!**

학생검토 | 김동원(KAIST)

권의진(서울대학교 지구환경과학부)

남현준(KAIST)

현주원(대전동신과학고등학교)

강지희(대전동신과학고등학교)

제작 및 디자인

편집 | 김범호 (포만한 : MathAurora, MMI : Alg MAKBH)

발행정보

발행일 | 2017. 10. 02

발행인 | 김범호 (포만한 : MathAurora, MMI : Alg MAKBH)

온라인 배포 | 포만한 수학연구소, M² 수학연구소, Laplace Club

본 문제지에 대한 저작권은 M² 수학연구소 및 김범호(MathAurora)에게 있으며 저작권자의 허락 없이 전부 또는 일부를 상업적으로 이용하거나, 2차적 저작물을 작성하는 등의 저작권을 침해하는 행위는 일체의 행위는 금지되어 있습니다. 이를 어길시 저작권법에 따라 처벌받을 수 있습니다.

